Cvičení 6

Příklad 1: Napište Cayleyho tabulku pro danou operaci na daném nosiči, určete o jakou algebraickou strukturu se jedná a nalezněte všechny podalgebry dané algebry. Pokud je daná struktura grupou, tak určete řády jednotlivých prvků.

a) $(Z_3, +)$, $(Z_3, .)$, $(Z_3 \setminus \{\overline{0}\}, .)$,
b) $(Z_4, +)$, $(Z_4, .)$, $(Z_4 \setminus \{\overline{0}\}, .)$,
c) $(Z_5, +)$, $(Z_5, .)$, $(Z_5 \setminus \{\overline{0}\}, .)$,
d) $(Z_9, .)$, $(Z_9 \setminus \{\overline{0}\}, .)$,

Příklad 2: Najděte množiny invertibilních prvků (tj. existuje k nim prvek inverzní) I_x $(x \in \{4, 5, 9\})$ pro níže zadané algebraické struktury. Určete, jakou strukturu tyto prvky spolu s operací násobení tvoří. U všech nalezených grup určete řády prvků. Najděte k prvkům z I_x takové množiny, které jsou těmito prvky generovány. Najděte ekvivalence na nosičích I_x, které jsou kongruencemi.

a) $(Z_4, .)$,
b) $(Z_5, .)$,
c) $(Z_9, .)$,

Příklad 3: Uvažujte matici $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ v algebraické struktuře $(\mathbb{R}^{2x2}, .)$. Určete řád prvku A a strukturu, kterou generují mocniny tohoto prvku.

Příklad 4: Rozhodněte a zdůvodněte, zda je zadaná relační struktura svazem.

a) (B,β), kde $B = \{x \in N, 36 \bmod x = 0\}$ a $(x, y) \in \beta \Leftrightarrow y \bmod x = 0$
b) $(P(\{1, 2, 3\}),\subseteq)$
c) (E,ϵ), kde $E = N - \{0\}$ a $(x, y) \in \epsilon \Leftrightarrow x/y$
d) (F,ϕ), kde $F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ a $\theta = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (e, d), (e, f), (c, d), (d, g), (f, g)\}$ a $\phi = id(F) \cup \theta \cup \theta^T$
e) (G,γ), kde $G = \{a, b, c, e, f, g\}$, $\rho = \{(a, b), (a, e), (b, g), (e, f), (g, f)\}$ a $\gamma = id(G) \cup \rho \cup \rho^T$
f) (H,χ), kde $H = N$, $\chi = \{(0, 1)\} \cup \{(0, x),\ kde\ x \in \{2, 3, 4, \dots\}\} \cup \{(x, 1), kde x \in \{2, 3, 4, \dots\}\}$ a $\gamma = id(H) \cup \chi$

Příklad 5: Pro svazy z příkladu 4 (kde $a \wedge b = inf(a, b)$; $a \vee b = sup(a, b)$) určete:

a) $3 \vee (3 \wedge 4) =$; $3 \wedge (3 \vee 4) =$; $3 \vee (4 \wedge 9) =$; $3 \wedge (4 \vee 9) =$
b) $\{3\}\vee(\{3\}\wedge\{1\}) =$; $\{3\}\wedge(\{3\}\vee\{1\}) =$; $\{2\}\vee(\{3\}\wedge\{1, 3\}) =$; $\{2\}\wedge(\{3\}\vee\{1, 3\}) =$
c) $3 \vee (3 \wedge 4) =$; $3 \wedge (3 \vee 4) =$; $2 \vee (3 \wedge 666) =$; $2 \wedge (3 \vee 666) =$
d) $c \vee (c \wedge b) =$; $c \wedge (c \vee b) =$; $c \vee (b \wedge f) =$; $c \wedge (b \vee f) =$
e) $g \vee (g \wedge b) =$; $g \wedge (g \vee b) =$; $b \vee (g \wedge e) =$; $b \wedge (g \vee e) =$

Příklad 6: Pro svazy z příkladu 4 ověřte, zda splňují distributivní zákony ($a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$) či zákony modularity (pro $a \geq c$: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ a pro $a \leq c$). Určete, které z nalezených svazů jsou distributivní a které modulární.

Příklad 7: Pro svazy z příkladu 4 ověřte, zda jsou komplementárními (tj. existuje svazová 0, 1 a každý prvek má alespoň jeden komplement (kde pro komplement platí: $a \wedge a' = 0$ a $a \vee a' = 1$)) případně jsou dokonce booleovskými.

Příklad 8: Rozhodněte, které z následujících algebraických struktur jsou okruh, unitární okruh, obor integrity, těleso či pole.

a) $(\mathbb{Z}, +, .)$
b) $(\mathbb{R}, +, .)$
c) $(\mathbb{Z}_2, +, .)$
d) $(\mathbb{Z}_m, +, .)$
e) $(\mathbb{Q}, +, .)$
f) $(\mathbb{R}, +, .)$
g) $(\mathbb{R}^+, +, .)$
h) $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, .)$