Cvičení 5

Příklad 1: Určete vlastnosti následujících algebraických struktur (arita operace, uzavřenost, asociativnost, existence jednotkového prvku, existence inverzních prvků, komutativita). Určete typ algebraické struktury (grupoid, pologrupa, monoid, grupa, komutativní grupa).

a) $(A, *)$, kde $A = \{a, b, c\}$

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	a
c	b	a	c

b) $(A, \circ)$, kde $A = \{a, b, c\}$

∘	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

c) $(A, \heartsuit)$, kde $A = \{a, b, c\}$

♡	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

d) $(\mathbb{N}, +)$
e) $(\mathbb{N}, \cdot)$
f) $(\mathbb{N}, :)$
g) $(\mathbb{Z}, +)$
h) $(\mathbb{Z}, \cdot)$
i) $(\mathbb{Z}_5, +)$
j) $(\mathbb{Z}_5 \setminus [0]_5, \cdot)$
k) $(\mathbb{R}, .)$
l) $(\mathbb{R}^+, .)$

Příklad 2: Nalezněte všechny podalgebry algeber z předchozího příkladu. Pokud je daná struktura grupou, tak určete řády prvků a strukturu, kterou generují mocniny konkrétního prvku. Najděte ekvivalence na nosičích algeber, které jsou kongruencemi.

Příklad 3: Na množině celých čísel je dána relace $R_5 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (a - b) \bmod 5 = 0\}$. Ověřte, zda je daná relace R_5 ekvivalencí. Určete třídy ekvivalence a příslušnou faktorovou množinu $\mathbb{Z}_5$. Rozhodněte, zda je daná relace kongruencí na faktorové množině $\mathbb{Z}_5$ vzhledem k následujícím operacím:

a) sčítání
b) odčítání
c) násobení
d) dělení

Napište Cayleyho tabulky pro operace a)-d) na nosiči $\mathbb{Z}_5$ a určete o jaký typ grupoidu se jedná.

Příklad 4: Ověřte, zda následující ekvivalence jsou kongruencemi na dané algebře.

Pozn. $\mathbb{Z}_4$ je množina zbytkových tříd modulo 4. Zápisem $\overline{x}$ pak označujeme tu jednu zbytkovou třídu modulo 4, která je reprezentována číslem x, např. $\overline{0} = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$ a $\overline{1} = \{\ldots, -3, 1, 5, 9, \ldots\}$.

Sčítání nad zbytkovými třídami modulo 4 je definováno: $\overline{x} +_4 \overline{y} = \overline{(x + y) \bmod 4}$.

a) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence α, která indukuje následující třídy rozkladu: $[0]_\alpha = \overline{0} \cup \overline{2}$, $[1]_\alpha = \overline{1} \cup \overline{3}$
b) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence β, která indukuje následující třídy rozkladu: $[0]_\beta = \overline{0} \cup \overline{1}$, $[1]_\beta = \overline{2} \cup \overline{3}$

c) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence γ, která indukuje následující třídy rozkladu: $[0]_\gamma = \overline{0}$, $[1]_\gamma = \overline{1}$, $[2]_\gamma = \overline{2}$, $[3]_\gamma = \overline{3}$

d) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ a ekvivalence δ, která indukuje následující třídy rozkladu: $[0]_\delta = \mathbb{Z}_4$

Příklad 5: Určete, jakého typu jsou následující algebraické struktury a zda jsou izomorfní. Pokud jsou, určete (definujte) zobrazení, které je izomorfismem. Nosič první struktury obsahuje čtvrté odmocniny jedničky s operací násobení, nosič druhé struktury obsahuje tělocvičné povely Stát, Čelem vzad, vPravo bok, vLevo bok a operaci skládání pohybů. $(A_1, .)$, kde $A_1 = \{1, -1, i, -i\}$ a $(A_2, \circ)$, kde $A_2 = \{S, C, P, L\}$

.	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

∘	S	C	P	L
S	S	C	P	L
C	C	S	L	P
P	P	L	C	S
L	L	P	S	C

Příklad 6: Zjistěte, zda dané zobrazení f je morfismem mezi následujícími algebraickými strukturami a určete typ morfismus.

a) $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$ a f(x)=2x mod 4,
b) $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$ a f(x)=(2x mod 4)+1,
c) $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ a $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ a f(x)=2x mod 6,
d) $(\mathbb{R}^+, .)$ a $(\mathbb{R}, +)$ a $f(x) = \log(x)$,
e) $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}, .)$ a $f(x) = e^x$ (co musíte změnit, aby se jednalo o izomorfismus?),
f) $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}, +)$ a $f(x) = k.x$.