Cvičení 4

Příklad 1: Připomeňte si definici uzávěrového systému a vlastnosti uzávěrového operátoru. Rozhodněte, zda jsou uvedené systémy množin uzávěrovými systémy. Pokud jsou, tak určete uzávěr podmnožin, které nejsou prvky uzávěrového systému. Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$.

a) $\mathcal{C}_1 \subseteq P(A)$, $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, A\}$,
b) $\mathcal{C}_2 \subseteq P(A)$, $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, A\}$,
c) $\mathcal{C}_3 \subseteq P(A)$, $\mathcal{C}_3 = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, A\}$
d) $\mathcal{C}_4 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_4 = \{R \subseteq A \times A, R$ je reflexivní$\}$,
e) $\mathcal{C}_5 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_5 = \{R \subseteq A \times A, R$ je symetrická$\}$,
f) $\mathcal{C}_6 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_6 = \{R \subseteq A \times A, R$ je tranzitivní$\}$,
g) $\mathcal{C}_7 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_7 = \{R \subseteq A \times A, R$ je ekvivalencí$\}$,
h) $\mathcal{C}_8 \subseteq P(A \times A)$, $\mathcal{C}_8 = \{R \subseteq A \times A, R$ je antisymetrická$\}$,

Příklad 2: Rozhodněte a zdůvodněte, zda je zadaná relační struktura poset (částečně uspořádaná množina). Pokud se jedná o poset, tak ho znázorněte Hasseovým diagramem a určete, zda je svazem. $\mathrm{tr}(R)$ označuje tranzitivní uzávěr relace R.

a) (A, α), kde $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ a $\eta = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (c, f), (e, d), (e, f), (c, d), (d, g), (f, g)\}$ a $\alpha = \mathrm{id}(A) \cup \mathrm{tr}(\eta)$
b) (B, β), kde $B = \{x \in N, 20 \bmod x = 0\}$ a $(x, y) \in \beta \Leftrightarrow y \bmod x = 0$
c) $(P(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$
d) (D, δ), kde $D = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $\tau = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, g), (c, f), (e, d), (g, d), (e, f)\}$ a $\delta = \mathrm{id}_D \cup \mathrm{tr}(\tau)$
e) (E, ε), kde $E = \mathbb{N} - \{0\}$ a $(x, y) \in \varepsilon \Leftrightarrow x|y$
f) (F, φ), kde $F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ a $\theta = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, d), (e, d), (e, f), (c, d), (d, g), (f, g)\}$ a $\varphi = \mathrm{id}_F \cup \mathrm{tr}(\theta)$
g) (G, γ), kde $G = \{a, b, c, e, f, g\}$, $\rho = \{(a, b), (a, e), (b, g), (e, f), (g, f)\}$ a $\gamma = \mathrm{id}_G \cup \mathrm{tr}(\rho)$
h) (H, σ), kde $H = \mathbb{N}$, $\chi = \{(0, 1)\} \cup \{(0, x), kde\ x \in \{2, 3, 4, \ldots\}\} \cup \{(x, 1), kde\ x \in \{2, 3, 4, \ldots\}\}$ a $\sigma = \mathrm{id}_H \cup \chi$
i) (I, ι), kde $I = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\iota = \mathrm{tr}(re(\{(a, b), (b, c), (c, d), (c, e), (d, f), (e, f)\}))$
j) (I, κ), kde $I = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\kappa = \mathrm{tr}(re(\{(a, c), (b, c), (c, d), (c, e), (d, f), (e, f)\}))$
k) $(\mathbb{N}, \leq)$
l) $(K, \leq)$, kde $K = \{x \in \mathbb{Q}; |x| < \sqrt{3}\}$

Příklad 3: Rozhodněte, zda jsou některé svazy z předchozího příkladu úplnými svazy

Příklad 4: Sestrojte izotonní zobrazení $f_1 : B \rightarrow I$, $f_2 : I \rightarrow B$, $f_3 : H \rightarrow I$ a $f_4 : I \rightarrow I$ pro úplné svazy (B, β), (H, γ) a (I, ι) z příkladu 2. Určete o jaká zobrazení se jedná (surjekce, injekce, bijekce). Jsou inverzní relace k zobrazením f_i také zobrazeními? Ověřte. Sestrojte zobrazení $f_5 : I \rightarrow I$, které není izotonní.

Příklad 5: Určete pevný bod izotonního zobrazení $f_4 : I \to I$.

Příklad 6: Zopakujte si pojem operace. Jaké znáte nulární, unární a binární operace na:

a) množině celých čísel,
b) množině reálných čísel,
c) množině n-dimenzionálních reálných vektorů,
d) množině čtvercových regulárních matic dimenze n,
e) množině binárních homogenních relací.

Příklad 7: Ověřte, zda má daná binární homogenní operace na daném nosiči některé z těchto vlastností - uzavřenost, asociativitu, komutativitu, idempotentnost, existuje pro danou operaci nulový prvek, jednotkový prvek a inverzní prvek ke každéme prvku nosiče:

a) $(\mathbb{N}, +)$,
b) $(\mathbb{N}, -)$,
c) $(\mathbb{N}, .)$,
d) $(\mathbb{N}, :)$,
e) $(\mathbb{N}, min)$,
f) $(\mathbb{R}, +)$,
g) $(\mathbb{R}, -)$,
h) $(\mathbb{R}, .)$,
i) $(\mathbb{R}, :)$,
j) $(\mathbb{R}^n, +)$,
k) $(\mathbb{R}^n, -)$,
l) $(\mathbb{R}^{n \times n}, .)$,
m) $(\{0, 1\}, \vee)$,
n) $(\{0, 1\}, \wedge)$,
o) $(\Sigma^*, \cdot)$, kde $\Sigma^* = \cup_{i \geq 0} \Sigma^i$ a Σ je konečná, neprázdná abeceda a operace $\cdot$ je zřetězení slov z Σ^*,
p) $(P(A \times A), \circ)$, kde $\circ$ reprezentuje skládání relací.

Příklad 8: Ověřte, zda pro zadanou dvojici binárních operací na určené množině platí, že první operace je distributivní vzhledem k druhé operaci (případně, zda platí levý či pravý distributivní zákon):

a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
b) $(\mathbb{R}, \cdot, +)$
c) $(\mathbb{R}, \cdot, -)$
d) $(\mathbb{R}, :, +)$
e) $(\mathbb{R}, :, \cdot)$
f) $(\mathbb{R}, \cdot, :)$
g) $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot, +)$
h) $(\{0, 1\}, \vee, \wedge)$
i) $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$