Cvičení 2

Příklad 1: Jsou dány relace $\rho, \alpha, \beta \subseteq A \times A$, $\sigma \subseteq A \times B$, kde $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ a
$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$,
$\sigma = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2), (d, 2)\}$,
$\alpha = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$,
$\beta = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$.
Všechny relace reprezentujte vhodnými grafy. Určete výsledné relace a jejich vlastnosti:

a) $\rho \cup \alpha$, $\rho \cup \beta$
b) $\rho \cap \alpha$, $\rho \cap \beta$
c) $\rho - \alpha$, $\rho - \beta$
d) $\rho \circ \sigma$, $\rho \circ \beta$, $\beta \circ \rho$
e) $\rho \circ (\alpha \circ \beta)$, $(\rho \circ \alpha) \circ \beta$
f) β^3, tranzitivní uzávěr relace β

Příklad 2: Pomocí matic sousednosti a incidence reprezentujte grafy, které odpovídají binárním relacím β a σ z předchozího příkladu.

a) Jak můžeme pomocí vhodné maticové reprezentace určit β^3? Proveďte.
b) Jaká matice stačí k jednoznačnému popisu grafu reprezentujícímu relaci σ? Napište.
c) Jak pomocí matic určíte relaci $\rho \circ \sigma$? Proveďte.
d) Co platí pro matici reprezentující relaci σ^{-1}? Napište matici reprezentující relaci σ^{-1}.

Příklad 3: Určete alespoň tři různé relace ekvivalence (ρ_1, ρ_2, ρ_3) na množině $A = \{a, b, c, d\}$. Určete počet všech různých ekvivalencí na A. Pro nalezené ekvivalence určete:

a) $\rho_i \cap \rho_j, i \neq j$ a rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci,
b) $\rho_i \cup \rho_j, i \neq j$ a rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci,
c) ρ_i^k pro $k \in \{2, 3, 4\}$.
d) rozklady indukované danými ekvivalencemi.
e) faktorové množiny podle dané ekvivalence (A/ρ_i) a zapište kanonické zobrazení množiny A na A/ρ_i.

Příklad 4: Rozhodněte, která z následujících relací na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je ekvivalence a pro ty, které jsou ekvivalence, najděte třídu ekvivalence $[(3, 4)]_{R_i}$:

a) $R_1 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 b_2 = a_2 b_1\}$,
b) $R_2 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 + b_2 = a_2 + b_1\}$,
c) $R_3 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 - a_2 = b_1 - b_2\}$,
d) $R_4 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)); a_1 - a_2 = b_2 - b_1\}$.

Příklad 5: Pomocí orientovaného grafu zakreslete řešení problému s převozníkem, vlkem, kozou a zelím (převozník může převážet přes řeku pouze jeden další objekt a vlk má tendenci sníst kozu a koza zelí, pokud nejsou pod dozorem převozníka).

a) V tomto grafu nalezněte všechny nejkratší cesty z počátečního uzlu do koncového uzlu. Jaká je jejich délka a kolik jich je?
b) V tomto grafu nalezněte všechny tahy z počátečního uzlu do koncového uzlu. Jaká je jejich délka a kolik jich je?
c) V tomto grafu nalezněte dva různé (dosud neuvedené) sledy z počátečního uzlu do koncového uzlu. Kolik různých sledů zde existuje?
d) V tomto grafu nalezněte dva různé cykly. Jaká je jejich délka?
e) V tomto grafu, po zanedbání orientace hran, určete alespoň tři různé kostry.

Příklad 6: Uvažujme k hromádek sirek, kdy v i-té hromádce je $n_i \geq 1$ sirek, $i = 1, \ldots, k$. Hráči střídavě odebírají sirky z hromádek. V daném tahu si hráč zvolí hromádku, z které bude odebírat (kde ještě nejsou odebrány všechny sirky) a odebere minimálně jednu a maximálně všechny sirky vybrané hromádky. Hráč, který odebere poslední sirku, vyhrál.

a) Nakreslete grafy, které odpovídají hrám Nim(2,2) a Nim(3,2).
b) Určete jádro grafu pro Nim(2,2) a Nim(3,2).

Příklad 7: Následující hypergraf $H = (X, E)$, kde $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_8\}$ a $E \subseteq P(X)$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\} = \{\{v_1, v_3, v_7\}, \{v_2, v_3, v_5\}, \{v_3, v_6, v_7, v_8\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$, reprezentujte pomocí množin a pomocí bipartitního grafu.