

Cvičení 1

Příklad 1: Určete kartézský součin následujících množin.

- $\{a, b\} \times \{a, b\}$
- $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 4\}$
- $\{a, b\} \times \{1, 2, 4\}$
- $\emptyset \times \{1, 2, 4\}$
- $\{a, b\} \times \{\{1\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$
- $\{a, b\} \times \{1, 2\} \times \{u, v\}$
- $\{(a, b), (a, c)\} \times \{1, 2\}$
- $P(\{a, b\}) \times \{1, 2\}$
- $\{\text{Pepa, Karel, Petr}\} \times \{\text{Horáček, Nováček}\}$

Příklad 2: Rozhodněte, zda se jedná o relace na množinách $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{d, e, f\}$ a určete signatury relací.

- $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
- $R_2 = \{a, b\}$
- $R_3 = \{(a, d), (b, d)\}$
- $R_4 = \{(a, a), (d, d)\}$
- $R_5 = \{(b, b), (c, d)\}$
- R_6 obsahuje následující prvky: $(a, a), (a, b), (a, c), (c, a), (c, b), (a, c)$
- $R_7 = \{(a, d, e), (c, f, d), (b, d, d)\}$
- $R_8 = \{(x, y, z); x \in A, y \in A, z \in B\}$
- $R_9 = \{(x, y) \in A \times A\} \cup \{R_9\}$

Příklad 3: Určete vlastnosti následujících binárních homogenních relací na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Relace zakreslete pomocí orientovaných grafů.

- $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1)\}$
- $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
- $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$
- $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1)\}$
- $R = \emptyset$
- $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$
- $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (2, 4), (1, 3)\}$
- $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1), (1, 3), (2, 3)\}$

Příklad 4: Je dána množina $A = \{a, b, c\}$. Určete alespoň 5

- a) reflexivních relací na množině A ,
- b) symetrických relací na množině A ,
- c) asymetrických relací na množině A ,
- d) tranzitivních relací na množině A .

Zakreslete je pomocí orientovaných grafů $G_i = (A, R_i)$. Zamyslete se nad počtem relací daného typu.

Příklad 5: Určete na množině $A = \{a, b, c\}$ relaci, která má níže uvedené vlastnosti. Zamyslete se nad nejmenší a největší možnou relací s požadovanými vlastnostmi.

- a) RE, SY, TR,
- b) RE, SY, není TR,
- c) AS, TR
- d) RE, AN, TR
- e) SY, IR,
- f) AN, IR.

U všech relací pak doplňte prvky tak, aby byla výsledná relace reflexivní (symetrická, tranzitivní). Tj. utvořte reflexivní (symetrický, tranzitivní) uzávěr dané relace.

Příklad 6: Navrhněte algoritmus, který pro zadanou konečnou množinu vygeneruje všechny či zadané množství relací, které jsou:

- a) RE,
- b) AN,
- c) SY.

Navrhněte algoritmus, kterým ověříte, že daná relace má konkrétní (RE, IR, SY, AS, AN, TR) vlastnosti (a jejich libovolné kombinace).

Příklad 7: Na množinách $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ a $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ jsou dány relace $R_1 = \{(a_1, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1)\}$, $R_2 = \{(b_1, c_2), (b_2, c_2), (b_3, c_1), (b_4, c_3)\}$, $R_3 = \{(c_1, d_1), (c_2, d_2), (c_3, d_3), (c_3, d_4)\}$.

- a) Určete, zda je relace R_i ($i = 1, 2, 3$) funkcí a pokud ano, tak jaká.
- b) Určete relaci inverzní k R_i a ověřte, zda je funkcí a případně jakou.
- c) Vytvořte složené relace $R_{12} = R_1 \circ R_2$, $R_{23} = R_2 \circ R_3$ a $R_{13} = R_{12} \circ R_{23}$. Určete, zda se jedná o funkce.
- d) Je skládání relací asociativní? Je skládání relací komutativní?

Příklad 8: Rozhodněte, zda jsou následující relace funkcemi a pokud ano, tak jakými.

- a) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c)\}$

- b) $R \subseteq \{a, b\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c)\}$
c) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b\}$, kde $R = \{(a, b), (b, b), (c, a)\}$
d) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$
e) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$
f) $R \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$, kde $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$
g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, y = \sin(x)\}$
h) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x = \sin(y)\}$
i) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, y = \sin(x)\}$
j) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x = \sin(y)\}$
k) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z = x + y\}$
l) $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z > x + y\}$