# Cvičení 10

**Příklad 1:** Připomeňte si definice následujících pojmů:

a) Otevřené a uzavřené množiny, okolí bodu,
b) uzávěrový systém, uzávěr množiny a uzávěrový operátor,
c) topologický prostor $(X, \tau)$ s otevřenými množinami, TP s uzavřenými množinami.
d) souvislý a nesouvislý topologický prostor.

**Příklad 2:** Máme množinu $A = \langle -1, -0.5) \cup \{1/n;\ n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{2\} \cup (3, 4\rangle \subset \mathbb{R}$.

a) Určete vnitřek množiny $A$,
b) Určete uzávěr množiny $A$,
c) Určete hranici množiny $A$,
d) Určete vnějšek množiny $A$,
e) Určete izolované body množiny $A$,
f) Určete hromadné body množiny $A$.

**Příklad 3:** Topologie horních podmnožin. Máme uspořádanou množinu $(X, \leq)$. Za otevřené množiny vezmeme tzv. horní podmnožiny $U \subseteq X$, pro které platí, že $x \in U$ a $x \leq y$, potom i $y \in U$.

a) Vytvořte nějakou topologii horních podmnožin na svazu $(\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, \rho)$, kde $\rho$ je relace celočíselné dělitelnosti.
b) Určete co nejmenší okolí jednotlivých prvků.
c) Určete uzávěr množin $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{6, 9\}$

**Příklad 4:** Rozhodněte, zda jsou následující struktury topologickými prostory s otevřenými (uzavřenými) množinami a pokud ano, zda se jedná o souvislé nebo nesouvislé TP:

a) $(\emptyset, \{\emptyset\})$,
b) $(X, \tau)$, kde $\tau = P(X)$ a $X = \{a, b, c\}$,
c) $(X, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, X\}$ a $X = \{a, b, c\}$,
d) $(\{a, b, c\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$,
e) $(\{a, b, c, d\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$,
f) $(\mathbb{R}, \tau)$, kde $(\mathbb{R}, \leq)$ je uspořádaná množina reálných čísel, otevřený interval je $(a, b) = \{x; a < x < b\}$ a $\tau = \{$všechny otevřené množiny v $\mathbb{R}\}$,
g) $(\{a, b, c, d, e\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$,
h) $(\{a, b, c, d, e\}, \tau)$, kde $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$,
i) $(X, \tau)$, $X \subseteq R^n$, $(n \in \mathbb{N})$, $\tau = \{U;\ U$ je sjednocením otevřených koulí v $R^n\}$,
j) $(X, \tau)$, $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$,
k) $(\mathbb{N}, \tau)$, $\tau = \{U;\ U \subseteq \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus U$ je konečná množina$\} \cup \{\emptyset\}$.

Zamyslete se, jak vypadá duální topologie definovaná pomocí doplňků (tj. pokud se jedná o topologický prostor otevřených množin, jak vypada TP uzavřených množin).

**Příklad 5:** Určete pokud možno nejmenší okolí prvku $x$ v topologiích z příkladu 4:

a) jakékoliv $x$,
b) $x = a$,
c) jakékoliv $x$,
d) -,
e) $x = b$,
f) $x = 0$,
g) $x = a$, $x = b$,
h) -,
i) $x = 0$ v $R^3$,
j) $x = 0$, $x = 1$,
k) $x = 42$.

**Příklad 6:** Určete uzávěr množiny A v topologiích z příkladu 4:

a) jakékoliv A,
b) $A = \{a\}$,
c) jakékoliv A,
d) -,
e) $A = \{b\}$,
f) $A_1 = \{0\}$, $A_2 = (0, 1)$
g) $A = \{b\}$,
h) -,
i) $A = \{x, max_{i=1,2,3}|x_i - 0| < 1\}$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^3$,
j) $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$,
k) $A_1 = \{42\}$, $A_2 = \{42, 44\}$,