Cvičení 8

Výchozími (nedokazovanými, primárními) dedukčními pravidly jsou všechna dedukční pravidla uvedená v definici 2.3.1 pro práci s výrokovými funktory, tj.:

Zavedení konjunkce:	$A, B \vdash A \wedge B$		**ZK**
Eliminace konjunkce:	$A \wedge B \vdash A, B$		**EK**
Zavedení disjunkce:	$A \vdash A \vee B$ nebo $B \vdash A \vee B$		**ZD**
Eliminace disjunkce:	$A \vee B, \neg A \vdash B$ nebo $A \vee B, \neg B \vdash A$		**ED**
Zavedení implikace:	$B \vdash A \supset B$		**ZI**
Eliminace implikace:	$A \supset B, A \vdash B$	*modus ponens*	**MP**
Zavedení ekvivalence:	$A \supset B, B \supset A \vdash A \equiv B$		**ZE**
Eliminace ekvivalence:	$A \equiv B \vdash A \supset B, B \supset A$	**EE**	

a následující čtyři pravidla pro práci s kvantifikátory:

Zavedení obecného kvantifikátoru: $A(x) \vdash \forall x A(x)$ **Z∀**

Pravidlo lze použít pouze tehdy, jestliže formule $A(x)$ není odvozena z žádného předpokladu, který obsahuje x jako volnou proměnnou.@ rozvest

Eliminace obecného kvantifikátoru: $\forall x A(x) \vdash A(x/t)$ **E∀**

Formule $A(x/t)$ je výsledkem korektní substituce termu t za proměnnou x ve formuli $A(x)$, tedy term T musí být substituovatelný za x ve formuli A.

Zavedení existenčního kvantifikátoru: $A(x/t) \vdash \exists x A(x)$ **Z∃**

Eliminace existenčního kvantifikátoru: $\exists x A(x) \vdash A(x/c)$ **E∃**

Použijeme-li pravidlo E∃ pro různé formule A, musíme za proměnnou x substituovat vždy jinou konstantu.
Obsahuje-li formule A, kromě kvantifikované proměnné x, ještě další volné proměnné, lze pravidlo eliminace existenčního kvantifikátoru formulovat obecněji takto:

$$\exists x\, A(x, y_1,...,y_n) \vdash A(\, x / f(y_1,...,y_n), y_1,...,y_n\,) \qquad \text{E}\exists$$

V tomto případě nelze za kvantifikovanou proměnnou x substituovat konstantu, ale funkci zbývajících (volných) proměnných. Použijeme-li pravidlo vícekrát pro různé formule, musíme za proměnnou x substituovat vždy jinou funkci $f(y_1,...,y_n)$.

Příklady:

1. Pomocí metody přirozené dedukce rozhodněte, zda je následující úsudek platný (pokuste se použít pouze základní dedukční pravidla).

   P1:Žádné liché číslo není sudé.
   P2: Některé liché čísla jsou prvočísla.
   Z: Některé prvočísla nejsou sudá.

2. Pomocí metody přirozené dedukce rozhodněte, zda je následující úsudek platný (dokažte všechny pomocné teorémy).

   P1. $\forall x\ [(P(x,a) \wedge P(x,b)) \supset Q(x,b)]$
   P2. $\exists x\ [\neg Q(x.b) \wedge P(x,b)]$
   Z: $\exists x\ [P(x.b) \wedge \neg P(x,a)]$

3. Pomocí metody přirozené dedukce rozhodněte, zda jsou následující úsudky platné (úsudek formalizujte a dokažte všechny pomocné teorémy).

   a) P1: Každý někomu pije krev.
   P2: Komu pije krev Drákula, ten brzo zemře.
   Z: Někdo brzo zemře.

   b) P1: Každý, kdo miluje jachting a moře, cítí k moři respekt.
   P2: Někteří respekt k moři necítí, ačkoliv ho milují.
   Z:Zřejmě existují takoví, kteří milují moře, ale nikoliv jachting.

   c) P1: Každý horolezec má rád pěkné počasí a pivo.
   P2: Michal má rád pouze milovníky pěkného počasí a piva.¨
   P3: Někteří milovníci pěkného počasí nemají rádi pivo.
   P4: Kdo není horolezec, ten se bojí výšek.
   Závěr: Michal nemá rád některé lidi, kteří se bojí výšek.

4. Pomocí metody přirozené dedukce rozhodněte logickou pravdivost následujících formulí (dokažte všechny pomocné teorémy)

   a) $\exists y \forall x\ [M(y) \wedge S(x,y)] \supset \{\forall x \forall y\ [(B(x,y) \wedge M(y)) \supset \neg V(y)] \supset \{\forall x \forall y\ [\neg M(y) \vee B(x,y)] \supset \forall x \neg V(x)\}\}$
   b) $\{\forall x \forall y\ [R(x,y) \wedge R(y,x)] \wedge \forall x \forall y \forall z [R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z)]\} \supset \forall x\ R(x,x)$