

Cvičení 5

1) **Rozhodněte**, zda jsou následující relace funkcemi, případně jakými. Budeme pracovat s množinami $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ a $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ jejichž prvky jsou různé.

- a) $R \subseteq A \times B$, $R=\{\langle a_1,b_3 \rangle, \langle a_2,b_2 \rangle, \langle a_1,b_1 \rangle\}$
- b) $R \subseteq B \times A$, $R=\{\langle b_1,a_4 \rangle, \langle b_2,a_4 \rangle, \langle b_3,a_4 \rangle\}$
- c) $R \subseteq A \times C$, $R=\{\langle a_1,c_2 \rangle, \langle a_2,c_3 \rangle, \langle a_3,c_1 \rangle\}$
- d) $R \subseteq A \times B$, $R=\{\langle a_1,b_1 \rangle, \langle a_2,b_2 \rangle, \langle a_3,b_3 \rangle, \langle a_4,b_3 \rangle\}$
- e) $R \subseteq B \times A$, $R=\{\langle b_1,a_3 \rangle, \langle b_2,a_2 \rangle, \langle b_3,a_1 \rangle\}$
- f) $R \subseteq A \times B \times C$, $R=\{\langle a_1,b_1,c_1 \rangle, \langle a_2,b_2,c_1 \rangle, \langle a_1,b_2,c_3 \rangle\}$
- g) $R=\{\langle x,y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, y=x^2\}$
- h) $R=\{\langle x,y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x=y^2\}$
- i) $R=\{\langle x,y \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, y=x^2\}$
- j) $R=\{\langle x,y \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x=y^2\}$

2) **Vyjádřete slovně** následující skutečnosti za předpokladu, že predikát P znamená mít rád (kdo, koho), individuová konstanta m znamená Marie a individuová konstanta k Karel.

- a) $\exists x \exists y P(x,y)$
- b) $\exists x \forall y P(x,y)$
- c) $\exists y \forall x P(x,y)$
- d) $\forall x \exists y P(x,y)$
- e) $\forall x \forall y P(x,y)$
- f) $\forall x P(x,m)$
- g) $\forall y P(k,y)$

3) **Dokažte**, že následující formule *nejsou ekvivalentní* (tj. najděte interpretaci, ve které je pravdivá jedna z nich, ale ne druhá). Jaký je mezi těmito formulemi vztah?

$$\exists x \forall y P(x,y) \qquad \forall y \exists x P(x,y)$$

4) **Zapište v jazyce PL1** následující výroky a najděte jejich *modely* a také *interpretace*, ve kterých **nejsou** pravdivé:

a) Množiny A a B mají neprázdný průnik. Některá A jsou B.

b) Všechna čísla jsou sudá nebo lichá.

c) Množina A je podmnožinou množiny B. Všechna A jsou B.

d) Žádné A není B. Množina A je podmnožinou komplementu množiny B.

e) Některá A nejsou B.

5) **Najděte model** pro následující formule

a) $\exists x R(x, f(x))$

b) $\forall x R(x, f(x))$

c) $\forall x \forall y [P(x, y) \supset Q(f(x), y)]$

d) $\forall x \forall y [P(x, y) \supset \neg Q(f(x), y)]$

e) $\exists x \forall y [V(x, y)]$

f) $\forall y \exists x [\neg V(x, y)]$